Előadás követő fóliák a Matematika mérnököknek I. című tárgyhoz

Burai Pál

Függvények.

A tananyag elkészítését az EFOP-3.4.3-16-2016-00021 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Függvények

A Föld középpontja felé szabadon eső test sebessége növekszik, azaz, a szabadon eső test sebessége az idő függvénye. Konstans hőmérsékleten tartott gáz nyomása térfogatának függvénye. Az egyszerű inga periódusa a hosszának függvénye. Ilyen, és ehhez hasonló típusú "függések" megfigyelése a fizikában és a mérnöki tudományokban vezetnek a természeti törvények (matematikai) megformálásához.

Függvények

A Föld középpontja felé szabadon eső test sebessége növekszik, azaz, a szabadon eső test sebessége az idő függvénye. Konstans hőmérsékleten tartott gáz nyomása térfogatának függvénye. Az egyszerű inga periódusa a hosszának függvénye. Ilyen, és ehhez hasonló típusú "függések" megfigyelése a fizikában és a mérnöki tudományokban vezetnek a természeti törvények (matematikai) megformálásához.

Két megfigyelt mennyiség különböző eszközökkel mérhető (pl. órák, vonalzók, mérlegek, ampermérők, feszültségmérők, stb.); az első mennyiség változása közben a második változását megfigyeljük (pl. idő és adott idő alatt megtett út). Az elsőt **független változó**nak nevezzük, míg a másodikat **függő változó**nak, a többi feltételt általában konstansnak tekintjük egy egyszerűbb modellben.

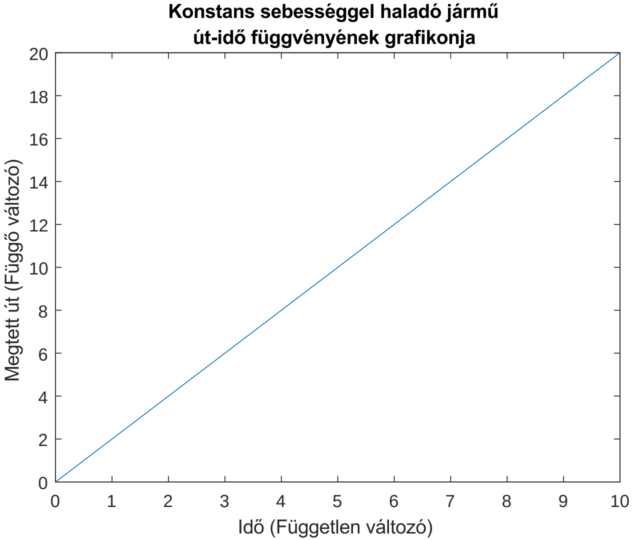
Függvények

A Föld középpontja felé szabadon eső test sebessége növekszik, azaz, a szabadon eső test sebessége az idő függvénye. Konstans hőmérsékleten tartott gáz nyomása térfogatának függvénye. Az egyszerű inga periódusa a hosszának függvénye. Ilyen, és ehhez hasonló típusú "függések" megfigyelése a fizikában és a mérnöki tudományokban vezetnek a természeti törvények (matematikai) megformálásához.

Két megfigyelt mennyiség különböző eszközökkel mérhető (pl. órák, vonalzók, mérlegek, ampermérők, feszültségmérők, stb.); az első mennyiség változása közben a második változását megfigyeljük (pl. idő és adott idő alatt megtett út). Az elsőt **független változó**nak nevezzük, míg a másodikat **függő változó**nak, a többi feltételt általában konstansnak tekintjük egy egyszerűbb modellben.

A megfigyelt kapcsolatot, adatokat táblázatba foglalhatjuk, vagy pedig ábrázolhatjuk koordináta rendszerben. Az természeti jelenségek ilyetén megfigyelése és ábrázolása lehetőséget ad matematikai modellezésükre.

Példa


Konstans sebességgel haladó jármű
út-idő függvényének grafikonja
Megtett út (Függő változó)
Idő (Független változó)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

A matematikai modell előnyei

- Rövidebb, és gyakran világosabb, egyszerűbb, mint a szavakkal leírt változata.

A matematikai modell előnyei

- Rövidebb, és gyakran világosabb, egyszerűbb, mint a szavakkal leírt változata.
- Nem félreérthető, egzakt. A megfigyelt mennyiségek közötti kapcsolatok ilyen módon való leírása kizárja félreértés lehetőségét.

A matematikai modell előnyei

- Rövidebb, és gyakran világosabb, egyszerűbb, mint a szavakkal leírt változata.
- Nem félreérthető, egzakt. A megfigyelt mennyiségek közötti kapcsolatok ilyen módon való leírása kizárja félreértés lehetőségét.
- Lehetőséget ad a megfigyelt fizikai mennyiség változásának becslésére a megfigyelt tartományon kívül is; extrapoláció.

A matematikai modell előnyei

- Rövidebb, és gyakran világosabb, egyszerűbb, mint a szavakkal leírt változata.
- Nem félreérthető, egzakt. A megfigyelt mennyiségek közötti kapcsolatok ilyen módon való leírása kizárja félreértés lehetőségét.
- Lehetőséget ad a megfigyelt fizikai mennyiség változásának becslésére a megfigyelt tartományon kívül is; extrapoláció.

A megfigyelt fizikai mennyiségek közötti kapcsolat leírása lehetőséget teremt a **matematikai modell** megalkotására.

Függvények

A matematikai modell előnyei

- Rövidebb, és gyakran világosabb, egyszerűbb, mint a szavakkal leírt változata.
- Nem félreérthető, egzakt. A megfigyelt mennyiségek közötti kapcsolatok ilyen módon való leírása kizárja félreértés lehetőségét.
- Lehetőséget ad a megfigyelt fizikai mennyiség változásának becslésére a megfigyelt tartományon kívül is; extrapoláció.

A megfigyelt fizikai mennyiségek közötti kapcsolat leírása lehetőséget teremt a **matematikai modell** megalkotására.

Példa

Tekintsünk egy rugót, amely az egyik oldalán rögzített a másikon pedig kifeszítjük. Ennek eredménye egy, a nyújtással ellentétes irányú, a rugó végének elmozdulását gátló erő létrejötte. A mérendő mennyiségek:: elmozdulás x méterben (m) kifejezve; erő F Newtonban (N) kifejezve. Az elmozdulás x több értékére végezhetünk méréseket, így számpárok egy sorozatát kapjuk melyek első koordinátája megfelel x-nek a második pedig F-nek.

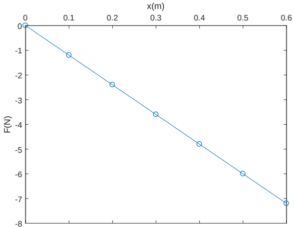
Példa (folytatás)

A kapott párokat az alábbi táblázatba foglaltuk. Az erő iránya ellentétes az elmozduláséval, ezért negatív számokat kapunk.
Az x által felvehető értékek összessége az **értelmezési tartomány**, az F által felvehető értékek halmaza pedig az **értékkészlet**.
A kapott párokat koordináta rendszerben ábrázoljuk, majd a kapott pontokat összekötjük, így x közbülső értékei esetén becslést kapunk F megfelelő értékére.

Példa (folytatás)

A kapott párokat az alábbi táblázatba foglaltuk. Az erő iránya ellentétes az elmozdulásával, ezért negatív számokat kapunk.
Az x által felvehető értékek összessége az **értelmezési tartomány**, az F által felvehető értékek halmaza pedig az **értékkészlet**.
A kapott párokat koordináta rendszerben ábrázoljuk, majd a kapott pontokat összekötjük, így x közbülső értékei esetén becslést kapunk F megfelelő értékére.

Elmozdulás (m)	Erő (N)
0.0	0.0
0.1	-1.2
0.2	-2.4
0.3	-3.6
0.4	-4.8
0.5	-6.0
0.6	-7.2



Az elmozdulás x, illetve az erő F közötti összefüggés képlettel is megadható, amely jelen esetben a következő:

$$F = -\alpha x, \quad \text{ahol} \quad \alpha = 12N/m.$$

Függvények

Adott x-et behelyettesítve a képletben, a neki megfelelő F-et kapjuk, azaz, az adott időben a rugó végén ható erő előjeles nagyságát. Vegyük észre, hogy **minden** x **értékhez pontosan egy** F **érték tartozik**. A fenti formula így egyértelmű.

Függvények

Adott x-et behelyettesítve a képletben, a neki megfelelő F-et kapjuk, azaz, az adott időben a rugó végén ható erő előjeles nagyságát. Vegyük észre, hogy **minden** x **értékhez pontosan egy** F **érték tartozik**. A fenti formula így egyértelmű.

A matematikai modell alkotása során az összetartozó értékpárok jelölésére leggyakrabban az x és y vagy az x és $f(x)$ jelöléseket használjuk, jelen esetben $f(x) = y = -\alpha x$.

Függvények

Adott x-et behelyettesítve a képletben, a neki megfelelő F-et kapjuk, azaz, az adott időben a rugó végén ható erő előjeles nagyságát. Vegyük észre, hogy **minden x értékhez pontosan egy F érték tartozik**. A fenti formula így egyértelmű.

A matematikai modell alkotása során az összetartozó értékpárok jelölésére leggyakrabban az x és y vagy az x és $f(x)$ jelöléseket használjuk, jelen esetben $f(x) = y = -\alpha x$.

Ha y csak x-től függ, akkor azt mondjuk, hogy y az x függvénye, ezt a következő jelöléssel fejezzük ki:

$$y = f(x).$$

Függvények

Adott x-et behelyettesítve a képletben, a neki megfelelő F-et kapjuk, azaz, az adott időben a rugó végén ható erő előjeles nagyságát. Vegyük észre, hogy **minden** x **értékhez pontosan egy** F **érték tartozik**. A fenti formula így egyértelmű.

A matematikai modell alkotása során az összetartozó értékpárok jelölésére leggyakrabban az x és y vagy az x és $f(x)$ jelöléseket használjuk, jelen esetben $f(x) = y = -\alpha x$.

Ha y csak x-től függ, akkor azt mondjuk, hogy y az x függvénye, ezt a következő jelöléssel fejezzük ki:

$$y = f(x).$$

Egy adott függvény pontos megadásához szükségünk van az x és y által felvehető értékek halmazának megadására is. Az előbbit a **függvény értelmezési tartományá**nak, az utóbbit a **függvény értékkészleté**nek nevezzük.

Függvények

A függvény fogalmának formális definíciója

Legyen adott a valós számok halmazának két részhalmaza. Az első az értelmezési tartomány (használjuk még az x értékek halmaza kifejezést is), a második pedig az értékkészlet (használjuk még az $f(x) = y$ értékek halmaza kifejezést is). Egy valós függvény minden x értékhez pontosan egy $f(x) = y$ értéket rendel hozzá.

Függvények

A függvény fogalmának formális definíciója

Legyen adott a valós számok halmazának két részhalmaza. Az első az értelmezési tartomány (használjuk még az x értékek halmaza kifejezést is), a második pedig az értékkészlet (használjuk még az $f(x) = y$ értékek halmaza kifejezést is). Egy valós függvény minden x értékhez pontosan egy $f(x) = y$ értéket rendel hozzá.

Példák

- $y = f(x) = 3x^2$.
- $y = f(t) = 2t$, the independent variable is t instead of x.
- piecewise defined function

$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 0 \\ 2x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

A függvény fogalmának formális definíciója

Legyen adott a valós számok halmazának két részhalmaza. Az első az értelmezési tartomány (használjuk még az x értékek halmaza kifejezést is), a második pedig az értékkészlet (használjuk még az $f(x) = y$ értékek halmaza kifejezést is). Egy valós függvény minden x értékhez pontosan egy $f(x) = y$ értéket rendel hozzá.

Példák

- $y = f(x) = 3x^2$.
- $y = f(t) = 2t$, the independent variable is t instead of x.
- piecewise defined function

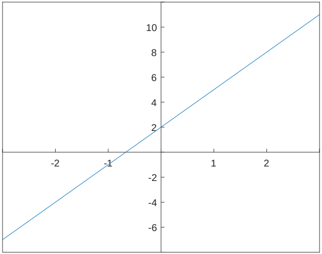
$$y = f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 0 \\ 2x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Feladat: Határozzuk meg az előbbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

Affin függvények

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = ax + b$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ adottak.

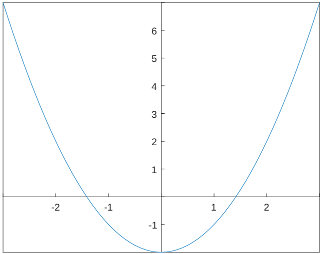
ábra: Affin függvény



Parabola

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ f(x)=ax^2+bx+c$, ahol $a,b,c\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0$ adottak.

ábra: Parabola



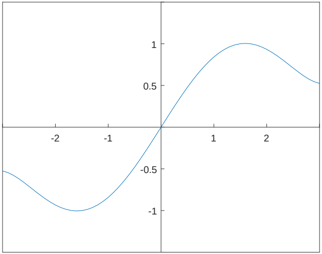
Polinomok

Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ adottak, ahol $a_n \neq 0$, ekkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

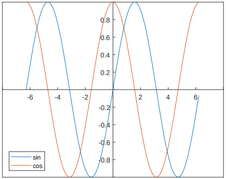
függvényt *n-edfokú valós polinom*nak nevezzük.

ábra: $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

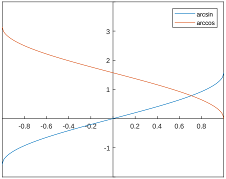


Trigonometrikus függvények

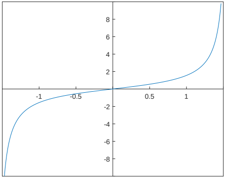
ábra: A szinusz és a koszinusz függvény



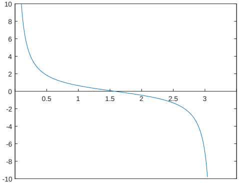
ábra: Az arkusz szinusz és az arkusz koszinusz függvény



ábra: A tangens függvény

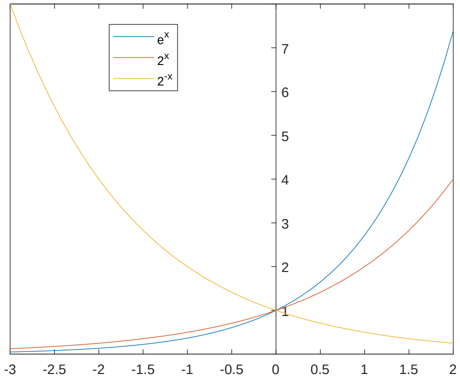


ábra: A kotangens függvény



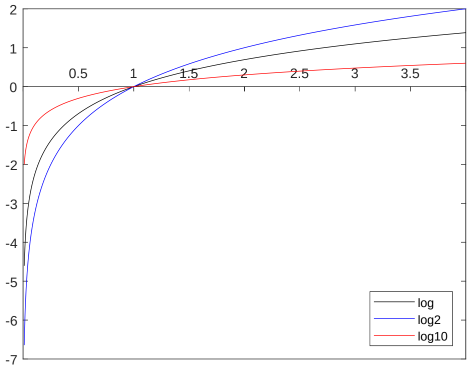
Exponenciális függvények

ábra: Az e^x a 2^x és az $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvény



Logaritmus függvények

ábra: A $\log_2(x)$ a $\log(x)$ és a $\log_{10}(x)$ függvény



Függvénytranszformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ adott konstans, ekkor

- $f(x) + K$ gráfja $f(x)$ gráfjának eltoltja az y tengely mentén K-val;

Függvénytranszformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ adott konstans, ekkor

- $f(x) + K$ gráfja $f(x)$ gráfjának eltoltja az y tengely mentén K-val;
- $f(x + K)$ gráfja $f(x)$ gráfjának eltoltja az x tengely mentén $-K$-val;

Függvénytranszformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ adott konstans, ekkor

- $f(x) + K$ gráfja $f(x)$ gráfjának eltoltja az y tengely mentén K-val;
- $f(x + K)$ gráfja $f(x)$ gráfjának eltoltja az x tengely mentén $-K$-val;
- $Kf(x)$ gráfja az $f(x)$ gráfjának K-szoros nyújtása az y tengely mentén;

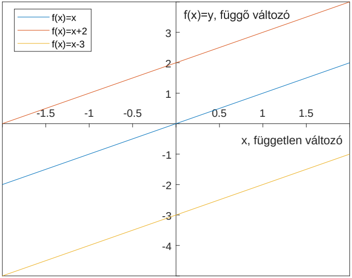
Függvénytranszformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ adott konstans, ekkor

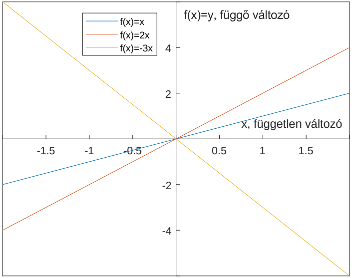
- $f(x) + K$ gráfja $f(x)$ gráfjának eltoltja az y tengely mentén K-val;
- $f(x + K)$ gráfja $f(x)$ gráfjának eltoltja az x tengely mentén $-K$-val;
- $Kf(x)$ gráfja az $f(x)$ gráfjának K-szoros nyújtása az y tengely mentén;
- $f(Kx)$ gráfja az $f(x)$ gráfjának $\frac{1}{K}$-szoros nyújtása az x tengely mentén.

Függvények, Példák

ábra: Eltolás

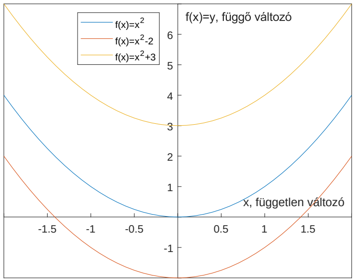


ábra: Nyújtás

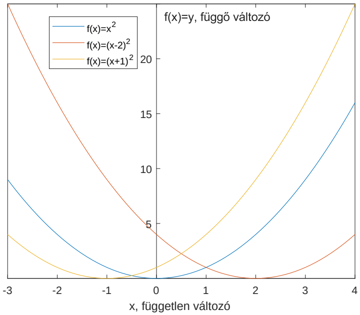


Függvények, Példák

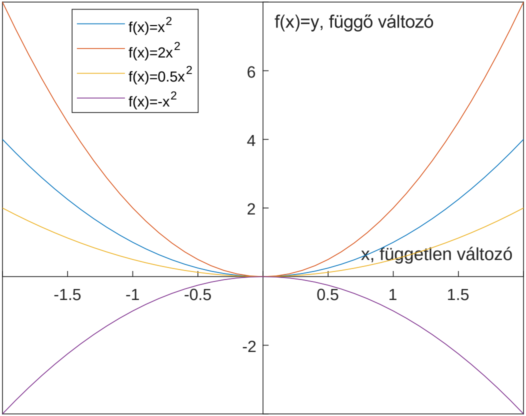
ábra: Eltolás az *y* tengely mentén



ábra: Eltolás az *x* tengely mentén



Függvények, Példák



ábra: Nyújtás

Ábrázoljuk a következő függvényeket!

- $f(x) = \sin x,\ \ g(x) = sin(x - \frac{\pi}{2}),\ \ h(x) = \sin(2x),\ \ i(x) = 2\sin(x).$
- $f(x) = 2(x-1)^2 + 2.$
- $f(x) = \frac{1}{x+1}.$
- $f(x) = x^2 - 2x + 3.$